

Prinsip Induksi Matematika

Bagian 2: Induksi Kuat (*Strong Induction*)

Kuliah Logika Matematika Semester Ganjil 2022-2023

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Desember 2022

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

- 1 *Discrete Mathematics and Its Applications* (Bab 5), Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
- 2 *Discrete Mathematics with Applications* (Bab 5), Edisi 5, 2020, oleh S. S. Epp.
- 3 *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
- 4 *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2010) di Fasilkom UI oleh A. A. Krisndahi.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke pleasedontspam@telkomuniversity.ac.id.

Bahasan

- 1 Induksi Kuat: Motivasi dan Arti
- 2 Contoh Pembuktian dengan Induksi Kuat
- 3 Soal-soal Latihan Induksi Kuat

Bahasan

- 1 Induksi Kuat: Motivasi dan Arti
- 2 Contoh Pembuktian dengan Induksi Kuat
- 3 Soal-soal Latihan Induksi Kuat

Induksi Kuat: Motivasi

Tidak selamanya prinsip induksi matematika (biasa) dapat digunakan secara mudah untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk $\forall n P(n)$.

Teorema

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan definisi rekursif ini, kita memiliki

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 < 2^1, a_2 = 2 < 2^2, a_3 = 3 < 2^3 \\ a_4 &= \end{aligned}$$

Induksi Kuat: Motivasi

Tidak selamanya prinsip induksi matematika (biasa) dapat digunakan secara mudah untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk $\forall n P(n)$.

Teorema

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan definisi rekursif ini, kita memiliki

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 < 2^1, a_2 = 2 < 2^2, a_3 = 3 < 2^3 \\ a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = \end{aligned}$$

Induksi Kuat: Motivasi

Tidak selamanya prinsip induksi matematika (biasa) dapat digunakan secara mudah untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk $\forall n P(n)$.

Teorema

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan definisi rekursif ini, kita memiliki

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 < 2^1, a_2 = 2 < 2^2, a_3 = 3 < 2^3 \\a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = 3 + 2 + 1 = 6 < 2^4 \\a_5 &= \end{aligned}$$

Induksi Kuat: Motivasi

Tidak selamanya prinsip induksi matematika (biasa) dapat digunakan secara mudah untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk $\forall n P(n)$.

Teorema

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan definisi rekursif ini, kita memiliki

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 < 2^1, a_2 = 2 < 2^2, a_3 = 3 < 2^3 \\a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = 3 + 2 + 1 = 6 < 2^4 \\a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 =\end{aligned}$$

Induksi Kuat: Motivasi

Tidak selamanya prinsip induksi matematika (biasa) dapat digunakan secara mudah untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk $\forall n P(n)$.

Teorema

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan definisi rekursif ini, kita memiliki

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 < 2^1, a_2 = 2 < 2^2, a_3 = 3 < 2^3 \\a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = 3 + 2 + 1 = 6 < 2^4 \\a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 = 6 + 3 + 2 = 11 < 2^5 \\a_6 &= \end{aligned}$$

Induksi Kuat: Motivasi

Tidak selamanya prinsip induksi matematika (biasa) dapat digunakan secara mudah untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk $\forall n P(n)$.

Teorema

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan definisi rekursif ini, kita memiliki

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 < 2^1, a_2 = 2 < 2^2, a_3 = 3 < 2^3 \\a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = 3 + 2 + 1 = 6 < 2^4 \\a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 = 6 + 3 + 2 = 11 < 2^5 \\a_6 &= a_5 + a_4 + a_3 =\end{aligned}$$

Induksi Kuat: Motivasi

Tidak selamanya prinsip induksi matematika (biasa) dapat digunakan secara mudah untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk $\forall n P(n)$.

Teorema

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan definisi rekursif ini, kita memiliki

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 < 2^1, & a_2 &= 2 < 2^2, & a_3 &= 3 < 2^3 \\a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = 3 + 2 + 1 = 6 < 2^4 \\a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 = 6 + 3 + 2 = 11 < 2^5 \\a_6 &= a_5 + a_4 + a_3 = 11 + 6 + 3 = 20 < 2^6\end{aligned}$$

Pertama kita akan mencoba membuktikan $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan induksi matematika (biasa).

Bukti (?)

Misalkan

Bukti (?)

Misalkan $P(n) \equiv a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Bukti (?)

Misalkan $P(n) \equiv a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) \equiv a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif:

Bukti (?)

Misalkan $P(n) \equiv a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) \equiv a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k) \equiv a_k < 2^k$ benar.

Bukti (?)

Misalkan $P(n) \equiv a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) \equiv a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k) \equiv a_k < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) \equiv a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \end{aligned}$$

Bukti (?)

Misalkan $P(n) \equiv a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) \equiv a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k) \equiv a_k < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) \equiv a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \end{aligned}$$

Selanjutnya ???

Bukti (?)

Misalkan $P(n) \equiv a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) \equiv a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k) \equiv a_k < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) \equiv a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \end{aligned}$$

Selanjutnya ???

- Kita tidak dapat menyelesaikan bukti teorema di atas hanya dengan induksi matematika biasa, karena kita tidak memiliki informasi apapun mengenai a_{k-1} dan a_{k-2} .
- Induksi kuat (*strong induction*) merupakan salah satu bentuk induksi matematika yang dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang serupa dengan teorema di atas.

Induksi Kuat: Arti

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi kuat?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas \mathbb{N}_0 .

Prinsip Induksi Kuat (*Strong Induction*)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, dilakukan:

Induksi Kuat: Arti

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi kuat?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas \mathbb{N}_0 .

Prinsip Induksi Kuat (*Strong Induction*)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, dilakukan:

- 1 **Tahap basis/ langkah basis:** buktikan bahwa $P(k)$ benar untuk beberapa k yang diperlukan (bisa lebih dari satu). Jelas bahwa harus dibuktikan bahwa $P(0)$ benar karena 0 adalah elemen terkecil pada \mathbb{N}_0 .

Induksi Kuat: Arti

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi kuat?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas \mathbb{N}_0 .

Prinsip Induksi Kuat (*Strong Induction*)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, dilakukan:

- 1 **Tahap basis/ langkah basis:** buktikan bahwa $P(k)$ benar untuk beberapa k yang diperlukan (bisa lebih dari satu). Jelas bahwa harus dibuktikan bahwa $P(0)$ benar karena 0 adalah elemen terkecil pada \mathbb{N}_0 .
- 2 **Tahap induktif/ langkah induktif:** buktikan bahwa untuk sembarang bilangan bulat i dengan $0 \leq i \leq k$, jika $P(i)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar. Dengan perkataan lain, buktikan bahwa implikasi berikut benar

$$(P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1).$$

- Sebagaimana induksi matematika biasa, langkah basis pada induksi kuat tidak harus mulai dari 0.

Bahasan

- 1 Induksi Kuat: Motivasi dan Arti
- 2 Contoh Pembuktian dengan Induksi Kuat**
- 3 Soal-soal Latihan Induksi Kuat

Contoh Pembuktian dengan Induksi Kuat

Teorema (Teorema 4)

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$,

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif:

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar.

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{definisi barisan}) \\ &< \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{definisi barisan}) \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{definisi barisan}) \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k = \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{definisi barisan}) \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k = \frac{7}{4} \cdot 2^k \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{definisi barisan}) \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k = \frac{7}{4} \cdot 2^k < \frac{8}{4} \cdot 2^k \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{definisi barisan}) \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k = \frac{7}{4} \cdot 2^k < \frac{8}{4} \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \quad (\text{definisi barisan}) \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k = \frac{7}{4} \cdot 2^k < \frac{8}{4} \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.

Berdasarkan prinsip induksi kuat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema (Teorema 5)

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$, untuk setiap $n \geq 3$. Barisan a_n memenuhi sifat bahwa a_n selalu bernilai ganjil untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Bukti (Bukti Teorema 5)

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Bukti (Bukti Teorema 5)

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1 , a_2 , dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif:

Bukti (Bukti Teorema 5)

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1 , a_2 , dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, \dots, a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ bernilai ganjil juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n) \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 5)

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1 , a_2 , dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, \dots, a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ bernilai ganjil juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n) \\ &= (2p + 1) + 2(2q + 1), \text{ untuk suatu } p, q \in \mathbb{Z} \\ &\quad \text{karena } a_{k-1} \text{ dan } a_k \text{ bernilai ganjil berdasarkan hipotesis induksi} \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 5)

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1 , a_2 , dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, \dots, a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ bernilai ganjil juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n) \\ &= (2p + 1) + 2(2q + 1), \text{ untuk suatu } p, q \in \mathbb{Z} \\ &\quad \text{karena } a_{k-1} \text{ dan } a_k \text{ bernilai ganjil berdasarkan hipotesis induksi} \\ &= 2p + 1 + 4q + 2 = 2p + 4q + 2 + 1 \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 5)

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1 , a_2 , dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, \dots, a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ bernilai ganjil juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n) \\ &= (2p + 1) + 2(2q + 1), \text{ untuk suatu } p, q \in \mathbb{Z} \\ &\quad \text{karena } a_{k-1} \text{ dan } a_k \text{ bernilai ganjil berdasarkan hipotesis induksi} \\ &= 2p + 1 + 4q + 2 = 2p + 4q + 2 + 1 \\ &= 2(p + 2q + 1) + 1. \end{aligned}$$

Ini berarti a_{k+1} juga bernilai ganjil. Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.

Bukti (Bukti Teorema 5)

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1 , a_2 , dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, \dots, a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ bernilai ganjil juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n) \\ &= (2p + 1) + 2(2q + 1), \text{ untuk suatu } p, q \in \mathbb{Z} \\ &\quad \text{karena } a_{k-1} \text{ dan } a_k \text{ bernilai ganjil berdasarkan hipotesis induksi} \\ &= 2p + 1 + 4q + 2 = 2p + 4q + 2 + 1 \\ &= 2(p + 2q + 1) + 1. \end{aligned}$$

Ini berarti a_{k+1} juga bernilai ganjil. Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar. Berdasarkan prinsip induksi kuat a_n bernilai ganjil untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

- 1 hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
- 2 hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

- 1 hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
- 2 hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

- 1 hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
- 2 hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 39$, kita memiliki $39 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

- 1 hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
- 2 hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 39$, kita memiliki $39 = 3 \cdot 13$, perhatikan bahwa 3 dan 13 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 23$, kita memiliki $23 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

- 1 hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
- 2 hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 39$, kita memiliki $39 = 3 \cdot 13$, perhatikan bahwa 3 dan 13 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 23$, kita memiliki $23 = 23 \cdot 1$, perhatikan bahwa 23 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 41$, kita memiliki $41 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

- 1 hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
- 2 hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 39$, kita memiliki $39 = 3 \cdot 13$, perhatikan bahwa 3 dan 13 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 23$, kita memiliki $23 = 23 \cdot 1$, perhatikan bahwa 23 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 41$, kita memiliki $41 = 41 \cdot 1$, perhatikan bahwa 41 adalah bilangan prima.

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis:

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ benar.

Langkah induktif:

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(2)$, $P(3)$, \dots , $P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar.

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(2)$, $P(3)$, \dots , $P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Tinjau dua kasus berikut:

- Kasus 1:

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(2)$, $P(3)$, \dots , $P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Tinjau dua kasus berikut:

- Kasus 1: Jika $k+1$ bilangan prima, maka

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(2)$, $P(3)$, \dots , $P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Tinjau dua kasus berikut:

- Kasus 1: Jika $k+1$ bilangan prima, maka $k+1 = (k+1) \cdot 1$.

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(2)$, $P(3)$, \dots , $P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Tinjau dua kasus berikut:

- Kasus 1: Jika $k+1$ bilangan prima, maka $k+1 = (k+1) \cdot 1$. Jadi $k+1$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

- Kasus 2:

- Kasus 2: Jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka

- Kasus 2: Jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k + 1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < k + 1$.

- Kasus 2: Jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k + 1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < k + 1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:

- Kasus 2: Jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k + 1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < k + 1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:
 - ▶ a adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1,

- Kasus 2: Jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k + 1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < k + 1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:
 - ▶ a adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1,
 - ▶ b adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

- Kasus 2: Jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k + 1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < k + 1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:
 - ▶ a adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1,
 - ▶ b adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Akibatnya, karena $k + 1 = ab$, maka $k + 1$ juga merupakan hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima.

Dari kedua kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $P(k + 1)$ benar.

- Kasus 2: Jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k + 1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < k + 1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:
 - ▶ a adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1,
 - ▶ b adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Akibatnya, karena $k + 1 = ab$, maka $k + 1$ juga merupakan hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima.

Dari kedua kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $P(k + 1)$ benar. Dengan prinsip induksi kuat, kita telah membuktikan bahwa $P(n) : n$ adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1, adalah benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$. □

Bahasan

- 1 Induksi Kuat: Motivasi dan Arti
- 2 Contoh Pembuktian dengan Induksi Kuat
- 3 Soal-soal Latihan Induksi Kuat

Latihan 2: Induksi Kuat

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut:

- 1 Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_0 = 0$, $a_1 = 4$, $a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2}$, untuk $n \geq 2$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n = 5^n - 1$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.
- 2 Misalkan b_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})$, untuk $n \geq 3$. Barisan b_n memenuhi sifat $1 \leq b_n \leq 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
- 3 Periksa kebenaran pernyataan ini: setiap barang yang harganya tidak kurang dari 12 sen dan bukan pecahan dapat dibayar menggunakan uang pecahan 4 sen dan 5 sen saja, tanpa kembalian.

Selesaikan permasalahan berikut:

- 4 Ada sebuah negeri yang menggunakan mata uang galleon. Uang sejumlah berapa saja yang dapat dibentuk hanya dari pecahan 2 galleon dan 5 galleon saja (selain 2 galleon dan 5 galleon itu sendiri)?