

Prinsip Induksi Matematika

Bagian 1: Induksi Biasa (*Ordinary Induction*)

Kuliah Logika Matematika Semester Ganjil 2023-2024

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Desember 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

- 1 *Discrete Mathematics and Its Applications* (Bab 5), Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
- 2 *Discrete Mathematics with Applications* (Bab 5), Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
- 3 *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
- 4 *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2010) di Fasilkom UI oleh A. A. Krisndahi.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke pleasedontspam@telkomuniversity.ac.id.

Bahasan

- 1 Pengantar: Motivasi, Arti, dan Analogi
- 2 Contoh Pembuktian dengan Induksi Matematika (Biasa)
- 3 Soal-soal Latihan Induksi Matematika (Biasa)

Bahasan

- 1 Pengantar: Motivasi, Arti, dan Analogi
- 2 Contoh Pembuktian dengan Induksi Matematika (Biasa)
- 3 Soal-soal Latihan Induksi Matematika (Biasa)

Motivasi

- Dari kuliah sebelumnya, kita sudah mengetahui berbagai jenis metode pembuktian matematis seperti: bukti langsung, bukti tak langsung dengan kontraposisi, maupun bukti tak langsung dengan kontradiksi.

Motivasi

- Dari kuliah sebelumnya, kita sudah mengetahui berbagai jenis metode pembuktian matematis seperti: bukti langsung, bukti tak langsung dengan kontraposisi, maupun bukti tak langsung dengan kontradiksi.
- Dalam bahasan ini, kita akan mengkaji suatu metode pembuktian yang berkaitan dengan himpunan bilangan cacah $\{0, 1, 2, \dots\}$ atau himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Motivasi

- Dari kuliah sebelumnya, kita sudah mengetahui berbagai jenis metode pembuktian matematis seperti: bukti langsung, bukti tak langsung dengan kontraposisi, maupun bukti tak langsung dengan kontradiksi.
- Dalam bahasan ini, kita akan mengkaji suatu metode pembuktian yang berkaitan dengan himpunan bilangan cacah $\{0, 1, 2, \dots\}$ atau himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, \dots\}$.
- Untuk mempermudah, kita akan menotasikan $\{0, 1, 2, \dots\}$ dengan \mathbb{N}_0 dan $\{1, 2, 3, \dots\}$ dengan \mathbb{N} .

Beberapa teorema yang berkaitan dengan \mathbb{N}_0 atau \mathbb{N} dapat dibuktikan dengan bukti langsung atau bukti tak langsung (dengan kontraposisi atau kontradiksi) secara mudah, seperti:

Teorema

Untuk setiap bilangan bulat tak negatif n , n genap jika dan hanya jika $5n + 3$ ganjil.

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $n^2 + 1 \geq 2n$.

Beberapa teorema yang berkaitan dengan \mathbb{N}_0 atau \mathbb{N} dapat dibuktikan dengan bukti langsung atau bukti tak langsung (dengan kontraposisi atau kontradiksi) secara mudah, seperti:

Teorema

Untuk setiap bilangan bulat tak negatif n , n genap jika dan hanya jika $5n + 3$ ganjil.

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $n^2 + 1 \geq 2n$.

Teorema lain “agak sulit” (atau bahkan agak mustahil) dibuktikan secara langsung, seperti:

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0			

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$		

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1			

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1		

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2			

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2		

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3			

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3	4		

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3	4	6	

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3	4	6	T
4			

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3	4	6	T
4	8		

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3	4	6	T
4	8	24	

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3	4	6	T
4	8	24	T
5			

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3	4	6	T
4	8	24	T
5	16		

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3	4	6	T
4	8	24	T
5	16	120	

“Verifikasi” Kebenaran dengan Contoh

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Teorema di atas dapat “diverifikasi” dengan memeriksa kebenarannya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

n	2^{n-1}	$n!$	$2^{n-1} \leq n!$
0	$\frac{1}{2}$	1	T
1	1	1	T
2	2	2	T
3	4	6	T
4	8	24	T
5	16	120	T
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Meskipun demikian, contoh tidak dapat digunakan sebagai landasan yang kokoh untuk menyatakan kebenaran suatu teorema, karena contoh hanya memberikan beberapa nilai kebenaran untuk beberapa elemen, bukan semua nilai kebenaran untuk semua elemen.

Induksi matematika merupakan suatu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk

Induksi matematika merupakan suatu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk

- $\forall n P(n)$

Induksi matematika merupakan suatu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk

- $\forall n P(n)$
- $\forall n (n \geq a \rightarrow P(n))$, untuk suatu $a \in \mathbb{N}_0$

n merupakan variabel pada \mathbb{N}_0 atau \mathbb{N} .

Catatan

Induksi matematika hanya dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan matematis yang berkaitan dengan \mathbb{N}_0 atau \mathbb{N} , atau pernyataan matematis atas himpunan dengan struktur yang “serupa” dengan salah satu himpunan tersebut.

Arti dan Analogi Induksi Matematika (Biasa)

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas \mathbb{N}_0 .

Prinsip Induksi Matematika (Biasa)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, maka

Arti dan Analogi Induksi Matematika (Biasa)

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas \mathbb{N}_0 .

Prinsip Induksi Matematika (Biasa)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, maka

- 1 Buktikan bahwa $P(0)$ benar, karena 0 adalah elemen terkecil pada \mathbb{N}_0 . Langkah pembuktian ini disebut dengan **tahap basis/ langkah basis**.

Arti dan Analogi Induksi Matematika (Biasa)

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas \mathbb{N}_0 .

Prinsip Induksi Matematika (Biasa)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, maka

- 1 Buktikan bahwa $P(0)$ benar, karena 0 adalah elemen terkecil pada \mathbb{N}_0 . Langkah pembuktian ini disebut dengan **tahap basis/ langkah basis**.
- 2 Buktikan bahwa untuk sembarang bilangan bulat $k \geq 0$, **jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ juga benar**. Langkah pembuktian ini disebut dengan **tahap induktif/ langkah induktif**.

Arti dan Analogi Induksi Matematika (Biasa)

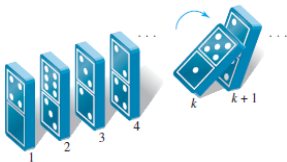
- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas \mathbb{N}_0 .

Prinsip Induksi Matematika (Biasa)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, maka

- 1 Buktikan bahwa $P(0)$ benar, karena 0 adalah elemen terkecil pada \mathbb{N}_0 . Langkah pembuktian ini disebut dengan **tahap basis/ langkah basis**.
- 2 Buktikan bahwa untuk sembarang bilangan bulat $k \geq 0$, **jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ juga benar**. Langkah pembuktian ini disebut dengan **tahap induktif/ langkah induktif**.

Induksi matematika bekerja seperti “efek domino”.



Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah \mathbb{N}_0 .

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah \mathbb{N}_0 .
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah \mathbb{N}_0 .
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(1)$ benar.

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah \mathbb{N}_0 .
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(1)$ benar.
- Selanjutnya karena $P(1)$ benar, dengan fakta $P(1) \rightarrow P(2)$ benar dan modus ponens, kita memiliki

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah \mathbb{N}_0 .
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(1)$ benar.
- Selanjutnya karena $P(1)$ benar, dengan fakta $P(1) \rightarrow P(2)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(2)$ benar.

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah \mathbb{N}_0 .
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(1)$ benar.
- Selanjutnya karena $P(1)$ benar, dengan fakta $P(1) \rightarrow P(2)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(2)$ benar.
- Dan seterusnya, sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk sembarang n .
- Pada implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$, $P(k)$ disebut sebagai hipotesis induksi.
- Langkah basis pada induksi matematika tidak harus mulai dari 0.

Bahasan

- 1 Pengantar: Motivasi, Arti, dan Analogi
- 2 Contoh Pembuktian dengan Induksi Matematika (Biasa)
- 3 Soal-soal Latihan Induksi Matematika (Biasa)

Contoh Pembuktian dengan Induksi Matematika (Biasa)

Teorema (Teorema 1)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$.
Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$.
Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif:

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 =$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa dengan menambahkan $k+1$ pada kedua ruas dari $P(k)$, kita memiliki

$$(1 + 2 + 3 + \dots + k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2}$$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa dengan menambahkan $k+1$ pada kedua ruas dari $P(k)$, kita memiliki

$$\begin{aligned}(1 + 2 + 3 + \dots + k) + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa dengan menambahkan $k+1$ pada kedua ruas dari $P(k)$, kita memiliki

$$\begin{aligned}(1 + 2 + 3 + \dots + k) + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2k+2}{2} =\end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa dengan menambahkan $k+1$ pada kedua ruas dari $P(k)$, kita memiliki

$$\begin{aligned}(1 + 2 + 3 + \dots + k) + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan $P(k)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa dengan menambahkan $k+1$ pada kedua ruas dari $P(k)$, kita memiliki

$$\begin{aligned}(1 + 2 + 3 + \dots + k) + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.

Berdasarkan prinsip induksi matematika $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk sembarang $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif:

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan

$P(k) \equiv 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa

$P(k + 1) \equiv$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan

$P(k) \equiv 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa

$P(k + 1) \equiv 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) =$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan

$P(k) \equiv 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa

$P(k + 1) \equiv 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ juga benar.

Perhatikan bahwa dengan menambahkan $2k + 1$ pada kedua ruas dari $P(k)$, kita memiliki

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) =$$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan

$P(k) \equiv 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa

$P(k + 1) \equiv 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ juga benar.

Perhatikan bahwa dengan menambahkan $2k + 1$ pada kedua ruas dari $P(k)$, kita memiliki

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= \end{aligned}$$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan

$P(k) \equiv 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa

$P(k + 1) \equiv 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ juga benar.

Perhatikan bahwa dengan menambahkan $2k + 1$ pada kedua ruas dari $P(k)$, kita memiliki

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan asumsikan

$P(k) \equiv 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa

$P(k + 1) \equiv 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ juga benar.

Perhatikan bahwa dengan menambahkan $2k + 1$ pada kedua ruas dari $P(k)$, kita memiliki

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Dengan demikian $P(k + 1)$ juga benar.

Berdasarkan prinsip induksi matematika $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ untuk sembarang $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) \equiv 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis:

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) \equiv 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) \equiv$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) \equiv 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) \equiv 2(3) + 1 < 2^3 \equiv 7 < 8$, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif:

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) \equiv 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) \equiv 2(3) + 1 < 2^3 \equiv 7 < 8$, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) \equiv 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1) \equiv$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) \equiv 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) \equiv 2(3) + 1 < 2^3 \equiv 7 < 8$, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) \equiv 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1) \equiv 2k + 3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$2k + 3 =$$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) \equiv 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) \equiv 2(3) + 1 < 2^3 \equiv 7 < 8$, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) \equiv 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1) \equiv 2k + 3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2k + 3 &= (2k + 1) + 2 \\ &< \end{aligned}$$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) \equiv 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) \equiv 2(3) + 1 < 2^3 \equiv 7 < 8$, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) \equiv 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1) \equiv 2k + 3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2k + 3 &= (2k + 1) + 2 \\ &< 2^k + 2 \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &\leq \end{aligned}$$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) \equiv 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) \equiv 2(3) + 1 < 2^3 \equiv 7 < 8$, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) \equiv 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) \equiv 2k + 3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2k + 3 &= (2k + 1) + 2 \\ &< 2^k + 2 \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &\leq 2^k + 2^k \text{ (karena jelas bahwa } 2 \leq 2^k \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}) \\ &= \end{aligned}$$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) \equiv 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) \equiv 2(3) + 1 < 2^3 \equiv 7 < 8$, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) \equiv 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1) \equiv 2k + 3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}2k + 3 &= (2k + 1) + 2 \\ &< 2^k + 2 \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &\leq 2^k + 2^k \text{ (karena jelas bahwa } 2 \leq 2^k \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}) \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.\end{aligned}$$

Dengan demikian $P(k + 1)$ juga benar.

Berdasarkan prinsip induksi matematika $2n + 1 < 2^n$ untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$. □

Bahasan

- 1 Pengantar: Motivasi, Arti, dan Analogi
- 2 Contoh Pembuktian dengan Induksi Matematika (Biasa)
- 3 Soal-soal Latihan Induksi Matematika (Biasa)

Latihan 1: Induksi Matematika (Biasa)

Latihan

- 1 Untuk bilangan asli n berapa sajakah pertidaksamaan $n^2 < 2^n$ berlaku? Jelaskan jawaban Anda. (Petunjuk: Anda mungkin memerlukan hasil pada Teorema 3, yaitu: $2n + 1 < 2^n$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$).
- 2 Untuk bilangan asli n berapa sajakah pertidaksamaan $2^n < n!$ berlaku? Jelaskan jawaban Anda.
- 3 Diberikan bilangan real $x > 0$. Untuk bilangan asli n berapa sajakah pertidaksamaan $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ berlaku? Jelaskan jawaban Anda.
- 4 Untuk bilangan asli n berapa sajakah $n^3 - n$ habis dibagi 3? Jelaskan jawaban Anda.